Grado topológico y su aplicación en la teoría de estabilidad de soluciones periódicas

Andrés Mauricio Rivera [a]

[a]Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana Cali – Colombia

Se considera una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x), \qquad (\diamond)$$

en donde $f : \mathbb{R} \times R^d \to R^d$ es de clase C^1 y periódica en t; es decir, se cumple:

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$$

donde $T > 0$ es una cantidad fija (el periodo).

Este tipo de ecuaciones surgen en el estudio de las oscilaciones de un sistema mecánico o eléctrico en presencia de una fuerza externa (ver [3]). También se nota su presencia en los modelos de ecología que toman en consideración los efectos debidos al cambio de estación. Las distintas tasas de la población (fecundidad, mortalidad,..) se interpretan como funciones periódicas. (ver [1]).

La ecuación $(\diamond)$ puede presentar diversos tipos de soluciones recurrentes: Soluciones periódicas de periodo T, también llamadas *armónicas*, soluciones periódicas de periodo mínimo nT $(n \geq 2)$, llamadas *sub-armónicas*, soluciones *cuasi-periódicas*, entre otras. En el estudio de las soluciones periódicas hay tres problemas fundamentales: La existencia, las propiedades de estabilidad y el número de soluciones. La teoría del grado topológico es una herramienta muy conveniente para tratar el problema de la existencia.

El propósito de esta charla es mostrar que en ocasiones también se puede usar la teoría del grado topológico para mostrar la estabilidad asintótica de una solución periódica para $(\diamond)$. Para ello vamos a presentar una breve introducción de los siguientes temas:

1. Grado e índice de Brouwer.

2. El método de continuación (Aplicación a una ecuación tipo Duffing).

3. Indices de una solución periódica.

4. Estabilidad e índice (Análisis de la estabilidad asintótica de una solución periódica para una ecuación tipo Duffing).

Referencias

[1] J.M. Cushing. *Two species competition in a periodic environment* J. Math Biology, 10, 385-400, 1980.

[2] M. Krasnoselskii. *Translations along trayectories of differential equations*, Transl. of Math Mon 19. American Math Soc. 1968.

[3] N. Minorsky. *Nonlinear Oscillators*. Edit. krieger, 1974.

[4] F Nakajima, G. Seifert. *The number of periodic solutions of* 2*-dimensional periodic systems*, J. Diff. Equat.,49, 430-440. 1983.

[5] R. Ortega. *Stability and index of periodic solutions of an equation of Duffing type.* Boll. Un. Mat. Italiana 3B, 533-546. 1989.

[6] R. Ortega. *Topological degree and stability of periodic solutions for certain differential equations.* J. London Math Soc. 42, 505-516. 1990.